ENS CACHAN TA

PROBLÈME DURÉE : 3 heures

PRÉLIMINAIRES

On désigne par R_+ l'ensemble des réels positifs ou nuls et par R_+^* l'ensemble des réels strictement positifs.

1. Calculer $\sum_{p=0}^{n} 2^p$.
2. Montrer que si la suite β_n converge vers zéro, la suite Δ_n définie par
$$\Delta_n = \frac{\sum_{p=0}^{n} 2^p \beta_p}{2^{n+1}}$$
converge vers zéro. (On pourra fixer $\epsilon > 0$ et considèrer K tel que pour $k > K$ on ait $|\beta_k| < \epsilon$ puis majorer Δ_n)
3. Quelle est la limite de Δ_n si β_n tend vers β ?

On désire étudier les suites de fonctions f_n définies sur R_+ par la relation de récurrence
$$f_n(x) = \sqrt{\int_0^x f_{n-1}(t)dt}.$$

PARTIE I

On suppose que f_0 est définie par $f_0(x) = ax^b$ où $a \in R_+^*$ et $b \in R_+$.

1. Montrer que $f_n(x) = a_n x^{b_n}$ où a_n et b_n sont définis par des relations de récurrence.

2. Montrer que b_n converge vers 1.
3. Montrer qu'il existe une suite γ_n telle que
$$\ln a_{n+1} = \frac{1}{\gamma_{n+1}} \ln a_0 - \frac{1}{\gamma_{n+1}} \sum_{p=0}^{n} \gamma_p \ln(1 + b_p).$$
En déduire que a_n converge.
4. Quelle est la limite simple de la suite f_n ?

PARTIE II

1. Vérifier que si f_0 et g_0 sont des fonctions continues sur R telles que $0 \leq f_0 \leq g_0$, on a pour tout n, $0 \leq f_n \leq g_n$.
2. On suppose qu'il existe $\alpha \in R_+$ tel que $x^\alpha \leq f_0(x)$.

a. Montrer que pour tout $A > 0$, il existe des nombres réels strictement positifs a et b tels que $\forall x \in [0, A]$, $\quad ax^{\frac{\alpha+1}{2}} \leq f_1(x) \leq b$.

b. Montrer que la suite f_n converge simplement.

Tournez la page S.V.P.

ENS CACHAN TA

EXERCICE I

Soit R l'ensemble des nombres réels et $C(R)$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, définies et continues sur R. On considère l'application Φ de $C(R)$ dans $C(R)$ qui, à la fonction f fait correspondre la fonction $g = \Phi(f)$ définie par

$$g(x) = \int_1^x tf(t)\,dt$$

pour tout x appartenant à R.
On dit que g est la transformée de f.
1. Montrer que g est dérivable en tout point.
Montrer que g admet une dérivée seconde en 0 que l'on calculera.
2. Montrer que l'application Φ est un endomorphisme. Quel est son noyau ?
L'application Φ est elle injective ? surjective ?
3. Calculer la transformée de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2+3}{\sqrt{(x^2+2)^3}}.$$

4. Soit h une fonction dérivable, à dérivée continue.
On se propose de trouver les fonctions f telles que

$$(E) \quad f(x) + \int_1^x tf(t)\,dt = h(x).$$

Montrer que f est solution d'une équation différentielle du premier ordre dont on précisera la condition initiale.
Montrer que (E) possède au plus une solution.
Quelle est l'unique solution de (E) en fonction de h et h' ?
Expliciter les calculs pour $h(x) = x^2$.

EXERCICE II

Une matrice A symétrique est dite définie positive si
$X^*AX \geq 0$ pour toute matrice colonne X où X^* désigne la matrice transposée de X,
$X^*AX = 0$ implique $X = 0$.
Vérifier que les valeurs propres d'une matrice symétrique définie positive sont strictement positives.
Soit A une matrice symétrique définie positive et r un réel strictement positif.
1. Montrer que $rI + A$ est inversible.

On pose alors $B = (rI + A)^{-1}(rI - A)$.
2. Montrer que $(rI+A)$ et $(rI-A)$ commutent. En déduire que $B = (rI-A)(rI+A)^{-1}$ et $B = B^*$.
3. Soit λ une valeur propre de B. Montrer que $\lambda \neq -1$ et $\frac{1-\lambda}{1+\lambda}r$ est valeur propre de A.
4. Montrer que toutes les valeurs propres de B appartiennent à l'intervalle $]-1,+1[$.